

CALCUL NUMERIQUE DES ARCS

Procédure de construction d'Abaques (Partie - I)

Par :

M.A. MOHAMED-CHERIF

Ingénieur Ecole Polytechnique de Montréal - Magister Génie Civil
Enseignant à l'E.N.T.P. (Alger).

1 INTRODUCTION

Plusieurs ouvrages de Résistance des Matériaux traitent du calcul des arcs. Parmi les références classiques: Timoshenko [12], Courbon [4], Darkov [6] résument les méthodes utilisées par les différentes écoles dans le monde.

Timoshenko et Darkov utilisent principalement les théorèmes de Castigliano pour la formulation des équations donnant les déplacements et efforts. Tandis que Courbon utilise plutôt les formules de Bresse pour poser ces dites équations.

En ce qui concerne la résolution de ces équations pour certains types de problèmes, il s'est avéré que tous les auteurs recommandent l'utilisation des méthodes numériques pour leur traitement.

De plus, les équations proposées sont formulées à partir d'hypothèses simplificatrices qui sont variables d'un auteur à un autre.

Il s'agit principalement de la prise en compte ou non de l'effet de l'effort normal et/ou de l'effort tranchant dans l'énergie de déformation en fonction des valeurs des caractéristiques géométriques de la construction (surbaissément-élancement).

Pour les poutres droites, la question est définitivement tranchée. En effet, il est communément admis de négliger l'effet de l'effort tranchant dans les structures dont le rapport (h/ℓ) (hauteur de la section transversale rapportée à la longueur de la poutre) est supérieur au quinzième environ $(h/\ell > 1/15)$.

Par ailleurs, dans une analyse linéaire, l'effet de l'effort normal est généralement négligé. Il n'en est pas de même pour les structures à géométrie courbe, où intervient l'effet de la courbure.

Courbon, par exemple, admet que le rapport $E\Omega/G\Omega'$ (E et G étant respectivement le module d'élasticité et le module au cisaillement : Ω et Ω' respectivement la section transversale et la section réduite) peut être égal à l'unité eu égard à :

- la valeur faible de l'effort tranchant dans un arc,
- la hauteur de la section rapportée à la longueur de l'arc étant de l'ordre du cinquantième $(1/50)$ donne une prépondérance à la flexion.

Darkov qualifie de "*surbaissé*" un arc dont le rapport flèche à la clef rapportée à la longueur de la travée est inférieur au huitième $(f/\ell < 1/8)$ et considère l'effort normal constant dans l'arc.

De même qu'il admet pour ce même type d'arc que l'élément différentiel curviligne " ds " peut être assimilé à sa projection horizontale " dx ".

Pour le calcul des déplacements dans les arcs dont le rapport flèche à la clef sur une longueur de l'arc est supérieur au cinquième $(f/\ell > 1/5)$, il néglige les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant.

Dans le calcul des arcs à faible courbure, Timoshenko estime obtenir une approximation satisfaisante en admettant que la compression dans l'arc est égale à la poussée. De plus, il néglige l'influence du raccourcissement de la ligne moyenne de l'arc sous l'action de la compression longitudinale dans le calcul des déplacements.

2 Interprétation en déplacement

L'expression (2.1) doit être interprétée en fonction de u et w ; respectivement déplacement tangentiel et radial de la ligne moyenne. Pour cela on utilisera la figure (2.3) laquelle, pour des besoins de clarté, schématise des déplacements à grande échelle. Cependant on rappelle que les hypothèses de la théorie des petites déformations des petits déplacements sont celles retenues dans ce développement.

Avant de commencer l'analyse, et eu égard à l'hypothèse sus-mentionnée on négligera les ordres supérieurs. Ainsi les expressions intervenant dans le calcul s'écrivent :

$$(\rho + w)^2 \approx \rho^2$$

$$1 / (\rho + z) = 1 / \rho - z / \rho^2 + z^2 / \rho^3 + \dots$$

$$e / (\rho + z) = e / \rho - ez / \rho^2 + ez^2 / \rho^3 + \dots$$

$$\approx e / \rho$$

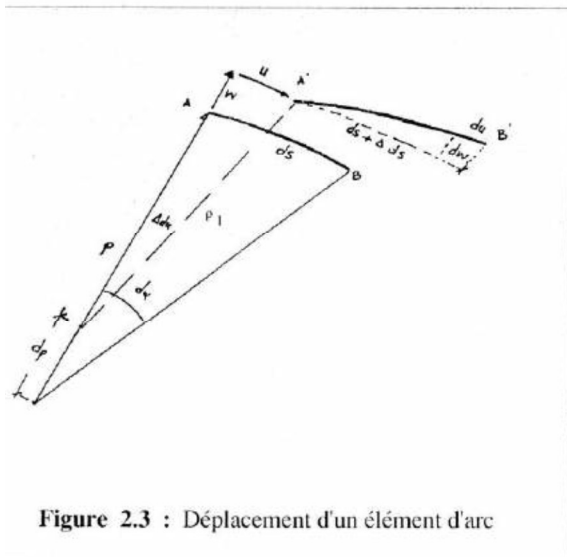


Figure 2.3 : Déplacement d'un élément d'arc

Le changement de courbure sera donné par :

$$\kappa = 1 / \rho_1 - 1 / \rho$$

Dans un système de coordonnées polaires (r, α) le rayon de courbure est donné par :

$$\rho = [r^2 + r'^2]^{3/2} / (r^2 - rr'' + 2r'r'^2)$$

Le rayon de courbure après déformation s'écrit :

$$\rho_1 = \rho - d\rho + w + u (\Delta\alpha) \approx \rho + w$$

Soit, compte tenu de l'hypothèse des petites déformations :

$$1 / \rho_1 = [(\rho + w)^2 - (\rho + w)w''] / (\rho + w)^3$$

$$= 1 / (\rho + w) - w'' / (\rho + w)^2$$

Le changement de courbure sera donné par :

$$\kappa = -d^2w / \rho^2 d\alpha^2 - w / \rho^2$$

$$\kappa = -d^2w / ds^2 - w / \rho^2 \quad (2.2)$$

Toujours d'après la figure 2.3 on remarquera que :

$$d\alpha + \Delta ds / \rho + \Delta d\alpha = [ds + \Delta ds] / \rho_1$$

$$\kappa = \Delta d\alpha / (ds + \Delta ds) \quad (2.3)$$

Sachant que :

$$\Delta ds = (\rho + w) d\alpha + du - \rho d\alpha$$

$$\Delta ds = w d\alpha + du$$

on peut écrire :

$$\Delta ds / ds = (w d\alpha / \rho d\alpha) + (du / ds)$$

$$= (du / ds) + (w / \rho) \quad (2.4)$$

En remplaçant (2.2) ; (2.3) et (2.4) dans (2.1) on obtient :

$$\varepsilon = du / ds + w / \rho + [(z + e) / (\rho + z)]$$

$$[\rho d^2w / ds^2 + w / \rho] [1 + (\Delta ds / ds)] \quad (2.5)$$

A ce niveau, et pour simplifier l'expression (2.5), plusieurs hypothèses sont disponibles selon les auteurs.

Ainsi Timoshenko [12] [13], considérant que (e) est suffisamment petit pour les sections courantes et en négligeant $\Delta ds / ds$ devant l'unité, donne l'expression suivante :

$$\varepsilon = du / ds + w / \rho - [z / (\rho + z)]$$

$$[\rho d^2w / ds^2 + w / \rho] \quad (2.6)$$

La variante proposée par Langhaar [9] néglige le terme (w / ρ^2) devant (d^2w / ds^2) soit :

$$\varepsilon = du / ds + w / \rho - z \rho d^2w / (\rho + z) ds^2 \quad (2.7)$$

Quant à Petyt et Fleicher [9] en adoptant la théorie des coques de révolution de Flügge [7] au problème de poutres courbes utilisent :

$$\varepsilon = du / ds + w / (\rho + z) - [z / (\rho + z)] [\rho d^2 w / ds^2 + u dp / p ds] \quad (2.8)$$

Cependant l'expression la plus usitée (Dawe [5] - Ashwell [1] - Prathaps [10] - Tessler [11]...) retient d'abord une transformation du fait de l'inextension de la fibre neutre sous l'effet de la flexion seulement et néglige z devant ρ .

En effet, si on désigne par ε_m la déformation longitudinale de la fibre moyenne ($z=0$) sous l'effet de la flexion seulement :

$$\varepsilon_m = du / ds + w / \rho = 0 \quad \text{soit} \quad w / \rho = -du / ds$$

On obtient pour l'expression de $\varepsilon(z)$:

$$\varepsilon(z) = du / ds + w / \rho - z [d^2 w / ds^2 - du / p ds] \quad (2.9)$$

2. 3 Energie de déformation

On développera ci-après les relations de la poutre courbe [4] [3] dans laquelle on prend en compte dans l'énergie de déformation l'effet de membrane et de flexion (M et N).

Les expressions pour la poutre dite de Bernoulli, prenant en compte dans l'énergie de déformation l'effet de flexion seulement, seront déduites facilement par simplification des termes correspondants.

On rappelle que dans la poutre dite de Timoshenko [12], on prend en compte en plus l'effet du cisaillement dans l'énergie de déformation.

La relation (2.2) devient, compte tenu de ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent :

$$\kappa = - d^2 w / ds^2 - w / \rho^2$$

$$\kappa = - d^2 w / ds^2 + du / p ds$$

On peut donc décomposer la déformation en :

$$\varepsilon_\ell = du / ds + w / \rho$$

déformation longitudinale sous l'effet de l'effort normal et :

$$\kappa = - d^2 w / ds^2 + du / p ds$$

variation de courbure sous l'effet du moment de flexion soit :

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_\ell - z\kappa \quad (2.10)$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$\pi = \int_V (1/2) [E (\varepsilon_\ell - z\kappa)^2] dv$$

Si l'on sait que :

$$\Omega = \int_\Omega d\Omega ; \quad I = \int_\Omega z^2 d\Omega \quad \text{et} \quad \int_\Omega z d\Omega = 0$$

On obtient:

$$2\pi = \int_0^\ell E\Omega \varepsilon_\ell^2 ds + \int_0^\ell EI\kappa^2 ds \quad (2.11)$$

L'expression (2.11) est établie pour la poutre courbe dans laquelle on néglige la variation de ρ selon la côte " z ", estimant que la hauteur de la poutre est suffisamment petite pour le faire.

Cette hypothèse peut s'exprimer aussi d'une autre manière : on néglige z devant ρ quand la courbure est suffisamment petite.

En fait, cette condition s'établit sur le rapport h / ρ (h : désignant la hauteur de la poutre) qui devra être suffisamment grand pour accepter l'hypothèse.

Par la suite, dans les calculs numériques, les conditions sur ce rapport seront examinées.

Dans le cadre de cette hypothèse, on peut exprimer en fonction des efforts internes (M) et (N), sachant que :

$$N = E\Omega\varepsilon_\ell \quad \text{et} \quad M = EI\kappa$$

$$2\pi = \int_0^\ell (N^2 / E\Omega) ds + \int_0^\ell (M^2 / EI) ds \quad (2.12)$$

▼ Théorie de Winkler

Cette théorie [3] suppose que la poutre est relativement haute ou que la courbure est assez grande pour ne plus négliger " z " devant ρ .

Il est à rappeler que les déformations de cisaillement ne sont pas prises en compte malgré la hauteur de la poutre.

La déformation s'écrit :

$$\varepsilon(z) = du / ds + w / (\rho + z) - [z / (\rho + z)] [\rho d^2 w / ds^2 + w / (\rho + z)]$$

Avant d'évaluer l'énergie de déformation, on établit d'abord certaines relations relatives à la géométrie de la poutre : relations utilisables dans l'expression de l'énergie de déformation.

On définira le nombre adimensionnel suivant :

$$Z = - (1 / \Omega) \int_\Omega [z / (\rho + z)] d\Omega \quad (2.13)$$

Le développement limité, précédemment mentionné, permet d'établir les relations suivantes pour Z :

$$\int_{\Omega} [\rho / (\rho + z)] d\Omega = \Omega (1 + Z) \quad (2.14)$$

$$\int_{\Omega} [z^2 / (\rho + z)] d\Omega = \rho \Omega Z \quad (2.15)$$

On remarquera que le calcul de Z peut se faire selon le développement de $z / (\rho + z)$

En effet :

$$z / (\rho + z) = z / \rho - z^2 / \rho^2 + z^3 / \rho^3$$

Si l'on retient les deux termes du développement on obtient :

$$\Omega Z = - \int_{\Omega} [z / \rho] d\Omega + \int_{\Omega} [z^2 / \rho^2] d\Omega = I / \rho^2$$

Par contre, si l'on retient les trois termes du développement :

$$\Omega Z = I / \rho^2 - \int_{\Omega} [z^3 / \rho^3] d\Omega$$

Dans ce cas et pour une section rectangulaire de largeur constante 'b' on a :

$$Z = (1 / 12) [h / \rho]^2$$

Pour établir les relations contraintes-déformations, on reprendra l'expression (2.1) dans laquelle on posera pour une section donnée :

$$K_n = \Delta s / d\alpha \quad \text{et} \quad K_f = \Delta d\alpha / d\alpha$$

Pour obtenir :

$$\epsilon = K_n (1 / \rho) - K_f (z + e) / (\rho + z)$$

$$\sigma = E [K_n / \rho - K_f (z + e) / (\rho + z)]$$

Le moment de flexion sera donné par :

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} \sigma z d\Omega \\ &= E(K_n / \rho) \int_{\Omega} z d\Omega - EK_f \int_{\Omega} z (z + e) / (\rho + z) d\Omega \end{aligned}$$

On peut donc retrouver :

$$K_f = M / EZ\Omega (e - \rho) \quad (2.16)$$

On remarquera que si la section est soumise à la flexion seulement, la contrainte normale est donnée par [4] [3] :

$$\sigma = - M (z + e) / Z\Omega (e - \rho) (\rho + z)$$

On voit bien que la répartition des contraintes n'est plus linéaire comme dans le cas des poutres droites; il s'agit plutôt d'une répartition hyperbolique :

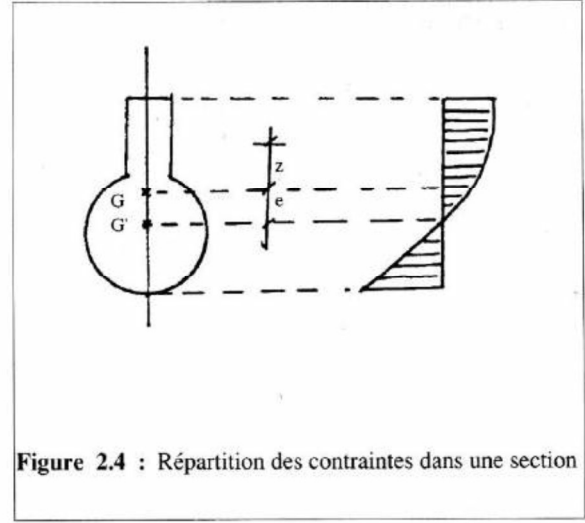


Figure 2.4 : Répartition des contraintes dans une section

Si (e) est suffisamment petit, et en négligeant (z) devant ρ ; on retrouve la relation bien connue d'équarissage :

$$\sigma = Mz / \Omega Z \rho^2 = Mz / I$$

L'équilibre de la section conduit à :

$$\begin{aligned} N &= \int_{\Omega} \sigma d\Omega \\ &= E\Omega K_n / \rho - EK_f [\Omega Z (\rho - e) - e\Omega / \rho] \end{aligned} \quad (2.17)$$

On peut ainsi tirer une relation donnant K_n pour déduire :

$$\begin{aligned} \sigma &= N / \Omega + [M / \rho \Omega] [1 + e / (Z(e - \rho))] \\ &\quad - M / \Omega Z (e - \rho) \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'expression (18) donne la contrainte à une côte (z) dans une section définie par ses caractéristiques géométriques (section-rayon de courbure de la ligne moyenne) et le nombre adimensionnel Z.

Dans le cas où l'on retient : $I = Z\Omega \rho^2$

$$\begin{aligned} \sigma &= N / \Omega + M / \rho \Omega + Mep / I(e - \rho) \\ &\quad - Mp^2 / I(e - \rho) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Si l'on néglige (e) devant ρ ; on obtient :

$$\sigma = N / \Omega + M / \rho \Omega + Me / I - Mp / I \quad (2.20)$$

3 SOLUTION ANALYTIQUE EN DEPLACEMENT ET EFFORT

Le chapitre précédent traite des relations différentielles pour les arcs ainsi que des différentes expressions de l'énergie de déformation pouvant être utilisées dans le cas des poutres courbes épaisses ou minces.

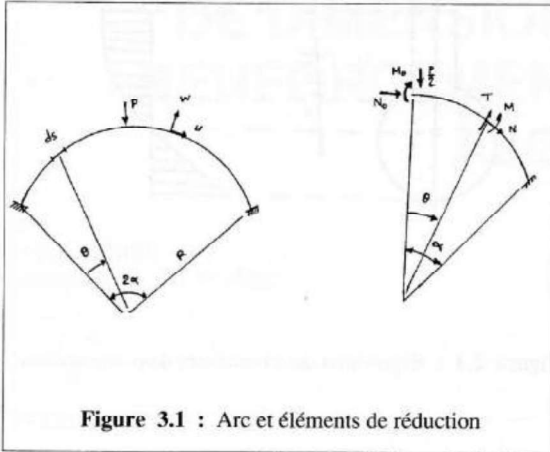


Figure 3.1 : Arc et éléments de réduction

On développera les solutions pour un arc circulaire de rayon (R) sous-tendant un angle 2α , successivement pour les cas de charge suivants :

- ♦ Charge ponctuelle à la clef (P)
- ♦ Charge uniforme horizontale (p)
- ♦ Charge uniforme radiale (q)

L'arc est encastré à ses extrémités, mais les solutions développées demeurent valables pour d'autres types de conditions limites avec les réaménagements nécessaires.

Le développement de ces solutions a un double objectif :

a) Etablir une solution exacte qui puisse servir de solution de comparaison dans la vérification de la formulation et surtout de la programmation des matrices de rigidité qui seront développées par la suite pour être introduites dans le programme STAP.

b) Orienter les solutions numériques dans la recherche de formes compactes utilisables dans les calculs courants avec des techniques simples et efficaces.

On se rappelle les expressions donnant la déformation longitudinale et la variation de courbures :

$$\epsilon_L = du / ds + w / R$$

$$\kappa = - d^2w / ds^2 + du / R ds$$

En utilisant les relations contraintes-déformations et la relation $z\Omega R^2 = 1$, on retrouve :

$$d^2w / d\theta^2 + w = (R^2 / EI) [M + ZNR] \quad (3.1)$$

3.1 Solution en déplacement

a)- Charge ponctuelle à la clef

Le problème posé étant symétrique (symétrie géométrique et mécanique ainsi que pour les conditions de liaisons et de charge), on s'intéressera à la section à la clef de l'arc pour déterminer les inconnues hyperstatiques N_0 et M_0 , respectivement effort normal et moment de flexion.

On notera que l'effort tranchant au niveau de cette section située sur l'axe de symétrie est nul.

Les efforts internes au niveau d'une section définie par l'angle θ ;

$$M = M_0 - (PR / 2) \sin \theta + N_0 R (1 - \cos \theta)$$

$$N = - N_0 \cos \theta - (P / 2) \sin \theta$$

L'équation différentielle de la déformée s'écrit :

$$(d^2w / d\theta^2) + w = (R^2 / EI) [M_0 + N_0 R \cos \theta (Z - 1) + (PR / 2) \sin \theta (Z - 1)] \quad (3.2)$$

La solution générale de (3.2) s'écrit sous la forme :

$$w = A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta + B_1 \theta \cos \theta + B_2 \theta \sin \theta + \Gamma \quad (3.3)$$

La détermination des constantes se fait par substitution et en appliquant les conditions limites ;

en posant :

$$M_0 = \beta PR ; \quad N_0 = \gamma P \quad \text{et} \quad \lambda = Z - 1$$

$$EIw / PR^3 = EIA_1 \cos \theta / PR^3 + \lambda \sin \theta / 4 - \lambda \theta \sin \theta / 4 + \gamma \lambda \sin \theta / 2 + \gamma + \beta \quad (3.4a)$$

$$EIA_1 \sin \alpha / PR^3 = \lambda \sin \alpha [(\alpha / 4) + (\gamma / 2)] + \gamma \lambda \alpha \cos \alpha / 2 \quad (3.4b)$$

La solution (3.4) devient solution dite de Bernoulli lorsque l'on ne prend en compte que la flexion ($Z=0$).

b)- Charge uniforme horizontale

Dans ce cas :

$$M = M_0 + N_0 R (1 - \cos\theta) - qR^2 \sin^2\theta / 2$$

$$N = N_0 \cos\theta + qR \sin\theta$$

La solution générale est de la forme :

$$w = A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta + B_1 \theta \cos\theta + B_2 \theta \sin\theta + C \cos 2\theta + \Gamma \quad (3.5)$$

En appliquant les conditions limites, on obtient la solution particulière :

$$\begin{aligned} EIw / qR^4 = & EIA_1 \cos\theta / qR^4 - Z\theta \cos\theta / 2 \\ & + \gamma (Z+1) \theta \sin\theta / 2 - \cos 2\theta / 12 \\ & - 1/4 + \gamma + \beta \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} EIA_1 \sin\alpha / qR^4 = & -\sin\alpha [\alpha Z / 2 + \gamma (Z+1) / 2] \\ & + \cos\alpha [\alpha\gamma (Z+1) / 2 - Z / 2] \\ & + \sin 2\alpha / 6 \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Dans les expressions (3.6) γ et β sont définis par :

$$M_0 = \beta qR^2 \quad \text{et} \quad N_0 = \gamma qR$$

c)- Charge uniforme radiale

Dans ce cas :

$$N = N_0 \cos\theta + qR\theta \sin(\theta/2)$$

$$M = M_0 + N_0 R (1 - \cos\theta) - qR^2 \theta \sin(\theta/2)$$

La solution générale est donnée par :

$$w = A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta + B_1 \theta \sin\theta + B_2 \theta \cos\theta + C \theta \cos(\theta/2) + \Gamma \quad (3.7)$$

L'application des conditions particulières donne la solution :

$$\begin{aligned} EIw / qR^4 = & EIA_1 \cos\theta / qR^4 + \gamma \theta \cos\theta / 2 \\ & + (4/3) (1-Z) [\theta \cos(\theta/2)] + \gamma + \beta \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} EIA_1 \sin\alpha / qR^4 = & \gamma \cos\alpha / 2 - \alpha \gamma \sin\alpha / 2 \\ & + (4/3) (1-Z) [\cos(\alpha/2) \\ & - (1/2) \alpha \sin(\alpha/2)] \end{aligned} \quad (3.8b)$$

Les expressions de γ et β sont les mêmes que celles du cas de charge précédent.

Il est à noter que l'on a développé dans les expressions (3.5), (3.6) et (3.8) les solutions dans les trois cas de charge considérés pour le déplacement radial (w).

En ce qui concerne le déplacement longitudinal (U), il pourra être facilement obtenu à partir des relations précédentes, sachant que :

$$du / ds = N / E\Omega - w / R \quad (3.9)$$

Les expressions de (N) et de (w) étant à chaque fois connues pour chaque cas de charge, l'intégration de (3.9) se fait sans difficulté particulière.

Enfin, il reste à déterminer les inconnues hyperstatiques M_0 et N_0 .

3.2 Détermination des inconnues hyperstatiques

Il est connu qu'en utilisant la méthode des forces pour déterminer les inconnues hyperstatiques, on obtient le système d'équations suivant :

$$[a_{ij}] \{X_j\} + \{b_{ip}\} = 0$$

avec, dans le cas où l'on retient la contribution de l'effort normal et du moment de flexion dans l'énergie de déformation :

$$a_{ij} = \int_0^L (\bar{M}_i \bar{M}_j / EI) ds + \int_0^L (\bar{N}_i \bar{N}_j / E\Omega) ds$$

$$b_{ip} = \int_0^L (\bar{M}_p \bar{M}_i / EI) ds + \int_0^L (\bar{N}_p \bar{N}_i / E\Omega) ds$$

$\bar{M}_i$ et $\bar{M}_j$, représentent le moment de flexion dans l'arc isostatique fondamental quand l'inconnue hyperstatique X_i où X_j est égale à l'unité.

$\bar{N}_i$ et $\bar{N}_j$, représentent l'effort normal dans l'arc isostatique fondamental quand l'inconnue hyperstatique X_i où X_j est égale à l'unité.

$\bar{M}_p$ et $\bar{N}_p$, représentant respectivement le moment de flexion et l'effort normal dans l'arc isostatique fondamental chargé par le cas de charge considéré.

On peut donc déterminer pour une structure donnée la matrice $[a_{ij}]$ et le vecteur $\{b_{ip}\}$ sera déterminé pour chaque cas de charge particulier.

Dans le cas considéré, les deux inconnues hyperstatiques au niveau de la clef de l'arc sont respectivement le moment de flexion X_1 et l'effort normal X_2 . Le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \end{pmatrix} = 0$$

En se référant à la figure 3.1 on a :

Pour $X_1 = 1$: $\bar{M}_1 = 1$ et $N_1 = 0$

Pour $X_2 = 1$: $\bar{M}_2 = R(1 - \cos\theta)$ et $\bar{N}_2 = \cos\theta$

$$a_{11} = \int_0^\alpha R d\theta / EI = R\alpha / EI$$

$$a_{12} = \int_0^\alpha R((1 - \cos\theta) / EI) R d\theta = [R^2 / EI] [\alpha - \sin\alpha]$$

$$a_{22} = \int_0^\alpha [R^2(1 - \cos\theta)^2 / EI] R d\theta + \int_0^\alpha [\cos^2\theta / E\Omega] R d\theta$$

$$a_{22} = (R^3 / EI) [(\alpha - 2\sin\alpha) + (Z + 1)(\alpha/2 + \sin 2\alpha/4)]$$

a)- Charge ponctuelle à la clef

Le vecteur charge se calcule par :

$$b_{1p} = \int_0^\alpha - (PR \sin\theta / 2EI) R d\theta = [PR^2(\cos\alpha - 1)] / 2EI$$

$$b_{2p} = \int_0^\alpha - (PR \sin\theta / 2EI) R(1 - \cos\theta) R d\theta + \int_0^\alpha + (P / 2E\Omega) \sin\theta \cos\theta R d\theta$$

$$b_{2p} = qR^4 [-0,25(\alpha - 0,5\sin^2\alpha) + (Z + 0,5)\sin^3\alpha/3] / EI$$

b)- Charge uniforme

Dans le cas d'une charge horizontale uniformément répartie, le vecteur charge s'écrit :

$$b_{1p} = \int_0^\alpha - (qR^2 / 2EI) \sin^2\theta R d\theta = - [qR^3 (\alpha/2 - \sin 2\alpha/4)] / 2EI$$

$$b_{2p} = \int_0^\alpha - (qR^2 / 2EI) \sin^2\theta R(1 - \cos\theta) R d\theta + \int_0^\alpha (qR \sin^2\theta / E\Omega) \cos\theta R d\theta$$

$$b_{2p} = [qR^4 (-0,25(\alpha - \sin 2\alpha/2) + (Z + 0,5) \sin^3\alpha/3)] / EI$$

c)- Charge radiale

Dans le cas d'une charge uniforme radiale le vecteur charge s'écrit :

$$b_{1p} = \int_0^\alpha - (pR^2 / EI) \theta \sin(\theta/2) R d\theta = (pR^3 / EI) [2\alpha \cos(\alpha/2) - 4 \sin(\alpha/2)]$$

$$b_{2p} = \int_0^\alpha - (pR^2 / EI) \theta \sin(\theta/2) R(1 - \cos\theta) R d\theta + \int_0^\alpha - (pR / E\Omega) \theta \sin(\theta/2) \cos\theta R d\theta$$

$$(EI / pR^4) b_{2p} = 4 \sin(\alpha/2) - 2 \alpha \cos(\alpha/2) + (Z - 1) [\alpha \cos(\alpha/2) - (\alpha/3) \cos(3\alpha/2) - 2 \sin(\alpha/2) + (2/9) \sin(3\alpha/2)]$$

L'examen des expressions précédentes montre la difficulté à résoudre les équations posées. C'est pourquoi il est nécessaire d'opter pour une résolution numérique par la méthode des éléments finis.

Cependant, pour permettre une vérification de la formulation des matrices de rigidité et surtout de leur codification, et leur insertion dans le programme STAP, les formules précédentes (dans le cas de la flexion seulement) ont été programmées en Fortran pour les cas suivants :

1°) Arc bi-encasté sous-tendant un angle de 90° ($f / L = 1/2$) avec une charge ponctuelle à la clef.

2°) Arc bi-encasté sous-tendant un angle de 43°, 60281695 ($f / L = 1/5$) avec une charge ponctuelle à la clef.

3°) Arc bi-encasté sous-tendant un angle de 22°, 6198649 ($f / L = 1/10$) avec une charge ponctuelle à la clef.

La solution des équations (16) donne respectivement pour les 3 cas ci-dessus :

$$f / L = 1/2 : \beta = 0,15146800 \quad \text{et} \quad \gamma = 0,4491380$$

$$f / L = 1/5 : \beta = 0,071834568 \quad \text{et} \quad \gamma = 1,1668559$$

$$f / L = 1/10 : \beta = 0,037080316 \quad \text{et} \quad \gamma = 2,3411143$$

4 FORMULATION DE LA MATRICE RIGIDITE

Afin de résoudre numériquement les problèmes traités analytiquement dans le paragraphe précédent, la méthode des éléments finis a été utilisée. Pour cela le programme STAP (STatic Analysis Program) développé par Bathe & Wilson [2] a été utilisé.

Toutefois, il y a lieu de l'adapter pour inclure les éléments finis d'arc dont la formulation est l'objet de ce qui suit.

Cette formulation se fera à partir du théorème de Castigliano en prenant en compte dans l'énergie de déformation successivement :

- L'effet du moment de flexion (M) seulement.
- L'effet du moment de flexion (M) et de l'effort normal (N).
- L'effet de (M), de (N) et de l'effort tranchant (T).

4.1 Matrice de rigidité : cas général

Un élément d'arc typique est montré sur la figure ci-dessous :

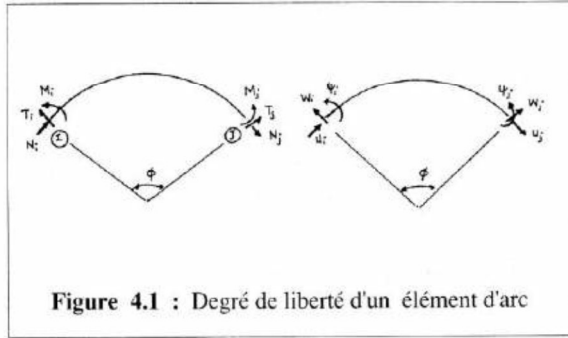


Figure 4.1 : Degré de liberté d'un élément d'arc

On désignera le vecteur [8] des déplacements du noeud I par :

$$[\delta_I] = [U_i, W_i, \psi_i]^T$$

U désignant le déplacement longitudinal du noeud,
W désignant le déplacement radial du noeud,
ψ on désignera la rotation du noeud.

De même, on désignera le vecteur des déplacements du noeud J par :

$$[\delta_J] = [U_j, W_j, \psi_j]^T$$

On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \delta_I \\ \delta_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{II} & S_{IJ} \\ S_{JI} & S_{JJ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_I \\ F_J \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} F_I \\ F_J \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

[S], représentant la matrice de souplesse de l'élément.

Les efforts internes M, N et T au niveau d'une section de l'élément définie par l'angle θ mesuré à partir du noeud I s'écrivent en établissant l'équilibre :

$$\begin{aligned} N &= N_i \cos \theta - T_i \sin \theta \\ T &= N_i \sin \theta + T_i \cos \theta \\ M &= M_i - N_i R (1 - \cos \theta) - T_i R \sin \theta \end{aligned}$$

L'énergie de déformation exprimée en fonction des efforts internes s'écrit :

$$\pi = \int_0^\phi (M^2 / 2EI) R d\theta + \int_0^\phi (N^2 / 2E\Omega) R d\theta + \int_0^\phi (T^2 / 2G\Omega') R d\theta$$

Ω, Ω' et I désignent les caractéristiques géométriques de la section de l'élément, respectivement la section, la section réduite et le moment d'inertie.

On simplifiera l'écriture des équations en utilisant les relations suivantes :

$$I = Z\Omega R^2 \quad \text{et} \quad G\Omega' = EI / kZR^2$$

k; étant le facteur définissant la section réduite Ω' en fonction de la section Ω.

Soit :

$$\pi = (R/2EI) \left[\int_0^\phi M^2 d\theta + ZR^2 \int_0^\phi N^2 d\theta + kZR^2 \int_0^\phi T^2 d\theta \right]$$

L'utilisation du théorème de Castigliano en minimisant l'énergie de déformation par rapport aux efforts M_i , N_i et T_i , conduit à retrouver la matrice de souplesse pour le noeud I qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U_i \\ W_i \\ \psi_i \end{pmatrix} = (R^3/2EI) \begin{pmatrix} a+Zb+Zkd & e+Zf-Zkf & \sin\phi - \phi \\ e+Zf-Zkf & d+Zd+Zkb & \cos\phi - 1 \\ \sin\phi - \phi & \cos\phi - 1 & \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RN_i \\ RT_i \\ 2M_i \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= 3\phi - \sin\phi \cos\phi - 4 \sin\phi \\ b &= \phi + \sin\phi \cos\phi \\ d &= \phi - \sin\phi \cos\phi \\ e &= 1 - 2 \cos\phi - \sin^2\phi \\ f &= -\sin^2\phi \end{aligned}$$

L'inversion des relations (4.2) conduit à écrire :

$$\{F_I\} = [K_{II}] \{\delta_I\}$$

La matrice $[K_{II}]$ est une sous-matrice de la matrice de rigidité qui lie les déplacements nodaux aux efforts aux noeuds s'écrit :

$$\begin{pmatrix} F_I \\ F_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{II} & K_{IJ} \\ K_{JI} & K_{JJ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_I \\ \delta_J \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Connaissant les efforts au noeud I, les efforts au noeud J se déterminent par les équations d'équilibre. Ce qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} N_j \\ T_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ R(1 - \cos \phi) & R \sin \phi & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{pmatrix}$$

soit formellement :

$$\{F_j\} = [T] \{F_i\}$$

[T] : étant la matrice de transformation.

$$\text{ou} \quad \{F_j\} = [T] [K_{II}] \{\delta_i\}$$

$$\text{or} \quad \{F_i\} = [K_{II}] \{\delta_i\}$$

on aura alors :

$$[K_{II}] = [T] [K_{II}]$$

Sachant que la matrice de rigidité est symétrique, on aura donc :

$$[K_{II}] = [K_{II}]^T$$

Pour établir la sous-matrice $[K_{JJ}]$, il est nécessaire de reprendre les relations précédentes en travaillant à partir du noeud J.

En établissant la correspondance nécessaire, on retrouve les mêmes relations à l'exception des termes reliant l'effort tranchant pour lesquels un changement de signe s'impose.

L'inversion de la matrice de souplesse ainsi obtenue conduit à la matrice de rigidité. On remarquera que les expressions obtenues dans le cas général sont relativement complexes. Aussi leur inversion analytique est pratiquement impossible.

Dans le cas général, où l'on prend en compte l'effet de M, N et T, qui sera désigné par solution de Timoshenko, l'inversion est effectuée numériquement.

4.2 Matrice de rigidité : Solution de Bernoulli

Dans le cas de la prise en compte dans l'énergie de déformation de l'effet de M seulement [8] (solution dite Bernoulli), la sous-matrice de souplesse se simplifie notablement en remarquant que : $Z = 0$

$$\begin{pmatrix} U_i \\ W_i \\ \Psi_i \end{pmatrix} = (R^2/EI) \begin{pmatrix} a & e & \sin \phi - \phi \\ e & d & \cos \phi - \phi \\ \sin \phi - \phi & \cos \phi - 1 & \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RN_i \\ RT_i \\ 2M_i \end{pmatrix}$$

Les expressions de a, d et e ont été données précédemment.

L'inversion explicite de la matrice ci-dessus et l'application de la procédure décrite dans le paragraphe 4.1 conduit à la matrice de rigidité $[K_{II}]$ dont les termes sont donnés ci-après :

$$k_{11} = (\cos \phi - 1)^2 / \phi + \sin^2 \phi / 2 - \phi / 2$$

$$k_{12} = 1 - \cos \phi - \sin^2 \phi / 2 + (\cos \phi - 1)(\phi - \sin \phi) / \phi$$

$$k_{13} = [(\sin \phi - \phi)(\phi / 2 - \cos \phi \sin \phi / 2) + (\cos \phi - \sin^2 \phi / 2 - 1)(\cos \phi - 1)](R / \phi)$$

$$k_{22} = (\phi - \sin \phi)^2 / \phi + 2 \sin \phi - \cos \phi \sin \phi / 2 - (3\phi / 2) \phi$$

$$k_{23} = [(3\phi / 2 - 2 \sin \phi + \cos \phi \sin \phi)(\cos \phi - 1) - (\phi - \sin \phi)(\cos \phi + \sin^2 \phi / 2 - 1)](R / \phi)$$

$$k_{33} = [(\cos \phi \sin \phi / 2 - \phi / 2)(3\phi / 2 - 2 \sin \phi + \cos \phi \sin \phi / 2) + (\cos \phi + \sin^2 \phi / 2 - 1)](R^2 / \phi)$$

Les facteurs de rigidité de k_{ij} sont à multiplier par $EI / (R^3 D)$ avec :

$$D = (3\phi / 2 - 2 \sin \phi + \cos \phi \sin \phi / 2)(\cos \phi - 1) - (\cos \phi + \sin^2 \phi / 2 - 1)(\phi - \sin \phi)$$

La matrice $[K_{II}]$ est obtenue à partir de $[K_{II}]$ en la multipliant par la matrice de transformation [T] :

$$\begin{pmatrix} -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ R(1 - \cos \phi) & R \sin \phi & -1 \end{pmatrix}$$

On sait également que : $[K_{II}] = [K_{II}]^T$

Par ailleurs, on peut montrer que :

$$[K_{JJ}] = \begin{pmatrix} k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ -k_{12} & k_{22} & -k_{23} \\ k_{13} & -k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$

On obtient alors la matrice de rigidité complète [K]

$$\begin{pmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{II} & K_{IJ} \\ K_{JI} & K_{JJ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_i \\ W_i \\ \Psi_i \\ U_j \\ W_j \\ \Psi_j \end{pmatrix}$$

4.3 Matrice de rigidité : solution avec M et N

Dans ce cas on ne retiendra dans la matrice de souplesse que les termes dus au moment de flexion et à l'effort normal [14] :

$$\begin{pmatrix} U_i \\ W_i \\ \Psi_i \end{pmatrix} = (R^3/2EI) \begin{pmatrix} a+Zb & e+Zf & \sin\phi - \phi \\ e+Zf & d+Zd & \cos\phi - 1 \\ \sin\phi - \phi & \cos\phi - 1 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RN_i \\ RT_i \\ 2M_i \end{pmatrix}$$

avec :

$$a = 3\phi - \sin\phi\cos\phi - 4 \sin\phi$$

$$b = \phi + \sin\phi\cos\phi$$

$$d = \phi - \sin\phi\cos\phi$$

$$e = 2(1 - \cos\phi) - \sin^2\phi$$

$$f = -\sin^2\phi$$

L'inversion explicite de la matrice de souplesse conduit à la sous matrice de rigidité $[K_{II}]$ dont les termes sont donnés ci-après :

$$k_{11} = (1 - \cos\phi)^2 / [2(1 + Z)] + \phi^2 / 4 - \phi\cos^2\phi / 4$$

$$k_{12} = \cos\phi (\cos\phi - 1) / [2(1 + Z)] + \phi\cos^2\phi / 4$$

$$k_{13} = \phi^2 / 4 - \phi\cos\phi(1 + \cos\phi) / 4 + \cos^2\phi / 4 -$$

$$- (1 - \cos\phi)^2 / [2(1 + Z)]$$

$$k_{22} = \phi^2 / 4 - \phi\cos^2\phi / 4 - \cos^2\phi / (1 + Z)$$

$$k_{23} = (\phi - \cos\phi) (1 - \cos\phi) / 4 + \phi\cos^2\phi / 4 +$$

$$+ \cos\phi (\cos\phi - 1) / [2(1 + Z)]$$

$$k_{33} = \phi^2 / 4 + \cos^2\phi / 2 - \phi\cos\phi (2 + \cos\phi) / 4 -$$

$$- (1 - \cos\phi^2) / [2(1 + Z)] + (1 + Z) [\phi^2 / 4 - \cos^2\phi / 4]$$

Les facteurs de rigidité sont à multiplier par :

$$EI / (R^3 D) \quad \text{avec :}$$

$$D = (1 + Z) [\phi^2 - \cos^2\phi - (1 - \cos\phi)(\phi - \cos\phi) / 2], \quad \phi / 8$$

$$\text{et } 1 = Z\Omega R^2$$

On reprendra la procédure explicitée auparavant pour déterminer les sous-matrices de rigidité $[K_{JJ}]$ et $[K_{IJ}]$ ou $[K_{JI}]$.

Dans cette première partie, on a vu le développement des solutions analytiques ainsi que la formulation des différentes matrices de rigidité d'un élément d'arc.

La seconde partie de ce travail utilisera ces résultats pour établir une procédure de construction d'abaque pour les arcs 6

5 BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.G Ashwell & A.B Sabir - "A New Cylindrical Finite Element Based on Simple Strain Function " Int. Jour. Mechanical Science vol.13 pp.171-180 ; 1971.
- [2] K.J.Bathe & E.L.Wilson - "Numerical Methods in Finite Element Analysis Prentice Hall". ; 1976.
- [3] S.F.Borg & J.J.Gennaro - "Modern Structural Analysis" éd. Van Nostrand Reinhol 1969.
- [4] J . Courbon - "Résistance des matériaux" . Tome 1 & 2 ; éd. DUNOND 1965.
- [5] D.J Dawe - "Curved Finited Element for Analysis of shallow and deep Arches" Computers & Structures Int. Jour.. vol.18 pp.559-580 ; 1974.
- [6] A. Darkov & V.Kouznetsov - "Mécaniques des Constructions" ; éd. MIR 1968.
- [7] W . Flügge - "Statique et dynamique des coques " ; éd. Eyrolles 1960.
- [8] H . Martin - "Introduction to MatrixMethods of Structurals Analysis" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [9] Petyt & Fleisher - "Free Vibration of Curved Beam" Journal of Sound & Vibration vol.18 pp.17-30 1970.
- [10] G. Prathap - "The Curved Beam/Deep Arch/Finite Ring Element Reviste" Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.21 pp.389-407 1980.
- [11] A. Tessler & L.Spiridigliozzi - "Curved Beam Elementbwith Penalty Relaxation" ; Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.23 pp.2245-2262 1986.
- [12] S.P.Timoshenko & Young - "Theory of Structures" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [13] S.P.Timoshenko & J.N Godier - "Theory of Elasticity" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [14] Y.Yamamoto & H. Oshtsub - " A qualitative Accuracy Consideration on Arch elements" ; Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.18 pp.1179-1193 1982.