



## EFFETS DE LA FORME DES FISSURES SUR LA RÉPONSE DYNAMIQUE ET L'INTENSITÉ DES CONTRAINTES DANS LES POUTRES EN CONSOLE

### EFFECTS OF CRACK GEOMETRY ON THE DYNAMIC RESPONSE AND STRESS INTENSITY FACTORS IN CANTILEVER BEAMS

Réception : 21/12/2025

Acceptation : 06/01/2026

Publication : 26/01/2026

MRAIN Soheir<sup>1</sup>, AYAS Hillal<sup>1</sup>, CHABAAT Mohamed<sup>1</sup>, BENGRAB Reda<sup>1</sup><sup>1</sup>University of Science and Technology Houari Boumediene, Alger. [mrainsoheir@gmail.com](mailto:mrainsoheir@gmail.com)<sup>1</sup>University of Science and Technology Houari Boumediene, Alger. [hillal.ayas@gmail.com](mailto:hillal.ayas@gmail.com)<sup>1</sup>University of Science and Technology Houari Boumediene, Alger. [mchabaat@yahoo.com](mailto:mchabaat@yahoo.com)<sup>1</sup>University of Science and Technology Houari Boumediene, Alger. [redaentp@gmail.com](mailto:redaentp@gmail.com)

**Résumé-** L'intégrité de l'acier structurel, qu'il soit utilisé seul ou en composite, nécessite une évaluation rigoureuse pour garantir la sécurité et la durabilité. Les fissures compromettent gravement les performances dynamiques et mécaniques avec un risque de défaillance catastrophique. Cette étude examine l'influence de la géométrie de la pointe d'une fissure notamment de forme rectangulaire, en U, en V et lenticulaire sur le facteur d'intensité de contrainte (FIC) et les fréquences propres des poutres cantilevers en acier. À l'aide de l'analyse par éléments finis (AEF) avec ANSYS, les concentrations de contraintes et les réponses modales ont été évaluées pour différentes configurations de fissures. Les résultats éclairent les pratiques de surveillance de l'intégrité structurale et de maintenance prédictive, contribuant ainsi à une meilleure compréhension du comportement de l'acier endommagé et à des pratiques de construction plus sûres et durables.

**Mots - clés :** Facteur d'intensité de contrainte, Fréquences propres, Analyse éléments finis, Géométrie fissures.

**Abstract-** The integrity of structural steel, whether used alone or in composites, requires rigorous evaluation to ensure safety and durability. Cracks critically compromise dynamic and mechanical performance, and potentially leading to catastrophic failure. This study investigates how crack tip geometry specifically rectangular, U-shaped, V-shaped, and lens-shaped affects the Stress Intensity Factor (SIF) and natural frequencies in steel cantilever beams. Using ANSYS Finite Element Analysis (FEA), stress concentrations and modal responses were evaluated for various crack configurations. The results provide insights applicable to structural health monitoring and predictive maintenance, advancing the understanding of steel behavior under damage and contributing to safer, more sustainable construction practices.

**Keywords:** Stress Intensity Factor, Natural Frequencies, Finite Element Analysis, Crack Geometry.

### 1-Introduction

L'intégrité structurelle des ouvrages en acier, qu'ils soient employés seuls ou en combinaison avec d'autres matériaux, constitue un impératif absolu pour assurer leur sécurité et leur durabilité. L'apparition de fissures, même de taille réduite, peut altérer de manière significative le comportement dynamique et mécanique de ces structures, potentiellement jusqu'à la défaillance totale. Parmi les paramètres définissant une fissure, sa géométrie notamment la forme de ses pointes qui joue un

rôle prépondérant dans la concentration des contraintes et la modification de la réponse vibratoire de l'élément fissuré. Cette étude se concentre ainsi sur l'influence critique de la morphologie des fissures (rectangulaires, en U, en V et en lentille) sur le facteur d'intensité de contrainte (FIC) et les fréquences propres de poutres en acier en porte-à-faux, des éléments fondamentaux dans le génie civil et mécanique en recourant à une modélisation par éléments finis via les logiciels ANSYS.

De nombreuses recherches ont investigué l'effet des fissures sur le comportement des structures, établissant un solide fondement pour ce travail. Les études pionnières sur le facteur d'intensité de contrainte ont posé les bases de la mécanique de la rupture linéaire élastique Paris et Erdogan [1]. Par la suite, les travaux ont largement exploré la relation entre les fissures et les modifications des fréquences naturelles et des modes propres des poutres Dimarogonas [2], devenant une référence en la matière. Chondros et al. [3] ont approfondi cette compréhension en analysant les vibrations longitudinales de poutres fissurées, fournissant des modèles analytiques essentiels. Plus récemment, Krawczuk et al. [4] et Patil et Maiti [5] ont employé la méthode des éléments finis (MEF) pour analyser l'influence de la profondeur et de la position de fissures de géométrie simplifiée (souvent rectangulaire) sur la réponse vibratoire. Des approches analytiques modernes, telles que la méthode des caractéristiques Ayas et al. [6] ont vu le jour. Tandis que la littérature abonde sur les fissures rectangulaires, les travaux comparant systématiquement l'effet de différentes formes de pointes de fissure, notamment les profils en V, en U et lenticulaires, restent moins nombreux et souvent spécifiques à un contexte particulier, laissant un champ d'investigation ouvert pour une analyse comparative approfondie.

Ce travail se distingue par l'analyse de l'impact de la forme de la pointe de la fissure sur deux indicateurs clés de l'intégrité structurale (le FIC et les fréquences propres). En établissant une comparaison détaillée et quantitative entre quatre morphologies distinctes à l'aide du solveur d'éléments finis majeurs ANSYS, apportant une contribution novatrice pour le développement d'algorithmes de détection et de caractérisation des fissures plus précis, essentiels pour une maintenance prédictive fiable des infrastructures critiques.

## 2- Méthodologie

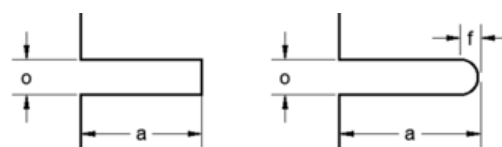
Le modèle éléments finis 3D d'une poutre en console de section rectangulaire pleine a été développé sous ANSYS pour analyser son comportement vibratoire. La géométrie, illustrée à la Figure 1, est définie par une longueur  $L=0.3\text{m}$ , une hauteur  $h=0.025\text{m}$  et une largeur  $b=0.01\text{m}$ . La poutre est en acier, avec un comportement isotrope élastique linéaire défini par un module de Young

$E=210\text{ GPa}$ , un coefficient de Poisson  $\nu=0.3$  et une masse volumique  $\rho=7850\text{ kg/m}^3$ , propriétés nécessaires au calcul des fréquences propres.

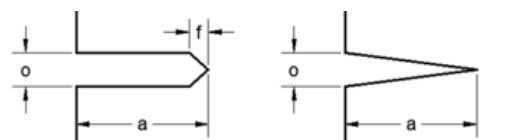


Figure 1: Poutre fissurée en porte à faux

Figure 1: Cantilever edge crack beam



(a): Fissure Rectangulaire (b): Fissure forme U



(c): Fissure lentille (d): Fissure forme V

Figure 2: Géométrie de la pointe de la fissure

Figure 2: Crack tip geometry

L'analyse a été portée sur une poutre fissurée, en examinant quatre géométries de fissures (en V, en U, rectangulaire et en lentille) à différentes profondeurs et emplacements.

Une analyse modale a été réalisée pour extraire les premiers modes de vibration axiale du système. La fissure a été modélisée comme traversant toute la largeur de la poutre et localisée sur la face supérieure, en soustrayant un volume de dimensions spécifiques du volume principal de la poutre à l'emplacement requis.

## 3- Résultats et Discussion

### 3.1- Validation du modèle

Une étude de convergence a été menée pour garantir l'indépendance des résultats vis-à-vis de la taille du maillage. La condition d'encastrement a été appliquée en bloquant tous les degrés de liberté sur la face encastree de la poutre. Pour l'analyse modale, les fréquences naturelles ont été extraites à l'aide de l'algorithme de résolution aux valeurs propres Block Lanczos. Le modèle

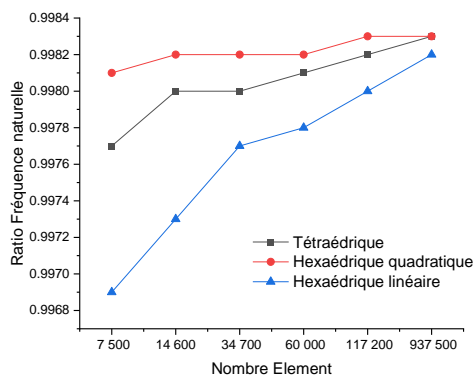
analytique utilisé pour la validation est basé sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli pour les vibrations axiales. Pour s'assurer de la fiabilité des modèles éléments finis développés, une comparaison des fréquences propres d'une poutre saine obtenues par la solution analytique et la MEF a été réalisée.

**Tableau 1:** Fréquence Naturelle Axiale - poutre cantilever saine

**Table 1:** Axial Natural Frequency - Uncracked Cantilever Beam

Fréquence Naturel Hz	Mode 1	Mode 2
Analytique	4206.29	12618.86
FEM (ANSYS)	4206.0	12619

Les résultats, présentés dans le Tableau 1, montrent un accord avec un écart relatif inférieur à 0.2% pour les premiers modes. Cette excellente corrélation valide la précision du modèle numérique et justifie son utilisation pour la suite de l'étude. L'influence de la finesse du maillage a été évaluée en comparant trois types d'éléments : tétraédriques linéaires, hexaédriques linéaires et hexaédriques quadratiques.



**Figure 3:** Convergence de la fréquence propre en fonction de la finesse du maillage pour différents types d'éléments finis

**Figure 3:** Convergence of the natural frequency as a function of mesh refinement for different types of finite elements.

Une attention particulière a été portée à la finesse du maillage dans la direction de la hauteur du modèle choisie.

**Tableau 2:** Rapport de fréquence  $f_n/f_0$  en fonction du nombre d'élément pour différents types de maillage.

**Tableau 2:** Natural frequency ratio  $f_n/f_0$  versus number of elements for different mesh types.

Nombre Élément	Tétraèdre	Hexaèdre Quadratique	Hexaèdre Linéaire
~ 7 500	0.9977	0.9981	0.9969
~ 14 600	0.998	0.9982	0.9973
~ 34 700	0.998	0.9982	0.9977
~ 60 000	0.9981	0.9982	0.9978
~ 117 200	0.9982	0.9983	0.998
~ 937 500	0.9983	0.9983	0.9982

Les résultats (Tableau 2 et Fig. 3) montrent la supériorité des éléments hexaédriques quadratiques qui offrent une convergence rapide et une précision supérieure à 99,8% pour environ 35 000 éléments. Les éléments linéaires présentent une convergence plus lente, l'élément tétraédrique linéaire surpassant toutefois son homologue hexaédrique à nombre d'éléments équivalent.

Ainsi le choix est porté sur l'élément hexaédrique quadratique (SOLID186).

### 3.2-Analyse modale

L'analyse modale a évalué l'influence de différents paramètres de fissure sur le comportement dynamique géométrie, profondeur (rapport  $a/h$ ), position axiale ( $x_1/L$ ) et ouverture.

#### 3.2.2-Influence de la forme

Les fréquences propres des cinq premiers modes pour différentes géométries de fissure (forme rectangulaire, en V, en U et en lentille), sont représentées dans le Tableau 3 pour une profondeur fixe  $a/h=0.1$  et une position située au milieu de la poutre  $x_1/L=0.5$ . On observe une diminution systématique des fréquences pour la plupart des modes par rapport à la poutre saine, confirmant l'effet global de l'amollissement structural induit par la fissure. Une divergence notable entre les fréquences des poutres avec des entailles (plate et pointue) et celles avec des fissures de type encoche V.

**Tableau 3 :** Fréquence naturelle normalisée  $f_n/f_0$  poutre cantilever fissurée pour différentes géométries de fissures ( $a/h = 0.1$ ,  $x_1/L=0.5$ )

**Table 3:** Normalized natural frequency  $f_n/f_0$  of a cracked cantilever beam for different crack geometries ( $a/h = 0.1$ ,  $x_1/L=0.5$ ).

Modes	Type de fissure		
	Encoche V	Entaille pointue	Entaille plate
Mode 1	0.960638	0.960209	0.960166
Mode 2	0.958189	0.956703	0.956562
Mode 3	0.96744	0.967387	0.96736
Mode 4	0.965497	0.964216	0.964087
Mode 5	0.974106	0.974106	0.974106

### 3.2.2- Influence de la profondeur et position

Outre la géométrie de la fissure, l'analyse a été conduite pour quantifier l'impact de la profondeur ( $a/h$ ), ainsi que la position axiale le long de la poutre.

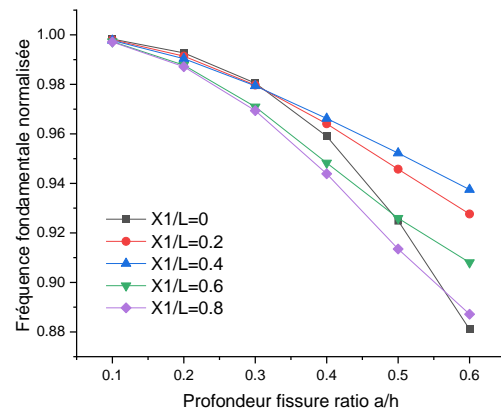
**Tableau 4 :** Fréquence Naturelle normalisée  $f_n/f_0$  d'une poutre cantilever pour différente géométrie de fissure

**Table 4:** Natural Frequency ratio  $f_n/f_0$  - cracked Cantilever Beam for different crack geometry

Position fissure $x_1/L$	Profondeur fissure $a/h$	Forme Rectang	Forme V	Forme U
0.00	0.20	0.99	0.99	1.00
	0.40	0.96	0.96	0.98
	0.60	0.88	0.88	0.92
0.20	0.20	0.99	0.99	1.00
	0.40	0.96	0.96	0.98
	0.60	0.93	0.93	0.95
0.40	0.20	0.99	0.99	1.00
	0.40	0.97	0.97	0.98
	0.60	0.94	0.94	0.95
0.60	0.20	0.99	0.99	1.00
	0.40	0.95	0.95	0.97
	0.60	0.91	0.91	0.93
0.80	0.20	0.99	0.99	0.99
	0.40	0.94	0.94	0.94
	0.60	0.89	0.89	0.89

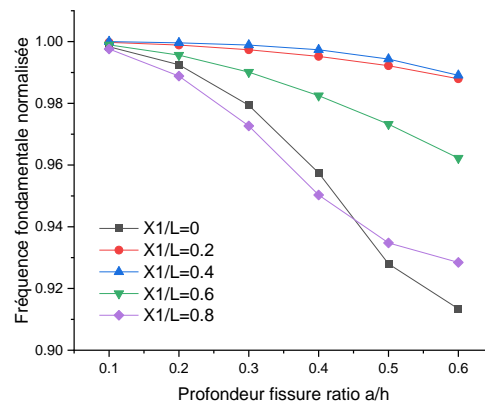
Deux tendances principales se dégagent : l'effet de la profondeur est dominant tel que pour une

position donnée, l'augmentation de  $a/h$  réduit significativement la fréquence, ainsi que l'effet de la position qui est crucial car une fissure près de l'encastrement (Position  $x_1/L= 0.0$ ) a un impact plus sévère qu'une fissure près de l'extrémité libre (Position  $x_1/L= 1$ ).



**Figure 4:** Fréquence normalisée mode 1 en fonction du rapport de profondeur de fissure ( $a/h$ ) pour différentes positions

**Figure 4:** Normalized mode 1 frequency as a function of crack depth ratio ( $a/h$ ) for different positions.



**Figure 5:** Fréquence normalisée mode 2 en fonction du rapport de profondeur de fissure ( $a/h$ ) pour différentes positions

**Figure 5:** Normalized mode 2 frequency as a function of crack depth ratio ( $a/h$ ) for different positions.

On remarque que le deuxième mode est plus sensible à la présence d'une fissure que le premier, notamment lorsque celle-ci est située à

mi-portée. Cela s'explique par la forme modale du mode 2, plus affectée par une perte de rigidité localisée à cette position.

### 3.2.2- Influence de de l'ouverture

Pour isoler l'effet de l'ouverture  $O$ , des analyses ont été conduites pour une profondeur et une position fixe.

**Tableau 5 :** Fréquence Naturelle d'une poutre Cantilever vs Ouverture de la fissure ( $a/b = 0.1$ , milieu de la poutre).

**Table 5:** Natural Frequency of a Cantilever Beam vs. Crack Opening ( $a/b = 0.1$ , mid-span).

Ouverture fissure O (mm)	Forme Lentille	
	Mode 1 fn1 (Hz)	Mode 2 fn2(Hz)
0.20	4206.54	12612.20
0.50	4206.49	12612.06
0.10	4206.74	12612.81
0.08	4206.79	12612.96
0.06	4206.74	12612.80
0.04	4206.78	12612.93
0.02	4206.86	12613.19
0.01	4206.80	12612.99

**Tableau 6 :** Variation de Fréquence poutre Cantilever vs. Ouverture de la fissure ( $a/b = 0.1$ , milieu de la poutre).

**Table 6:** Natural frequency variation of a cantilever beam versus crack opening ( $a/b = 0.1$ , center of the beam).

Ouverture fissure O (mm)	Forme Rectangulaire	
	fn1 (Hz)	fn2(Hz)
5	4204.36	12605.37
3	4205.12	12607.78
2	4205.54	12609.11
1	4206.00	12610.55
0.2	4206.30	12611.48
0.1	4206.29	12611.46
0.05	4206.33	12611.55
0.02	4207.18	12614.16

Les Tableaux 5 et 6 présentent les fréquences propres pour des fissures de type lentille et rectangulaire, respectivement.

Les résultats montrent que pour de faibles ouvertures ( $O < 0.1$  mm), l'effet est négligeable (variations  $< 0.01$  %). Pour des ouvertures plus importantes ( $O \geq 1$  mm), une diminution faible mais systématique des fréquences est observée (jusqu'à  $-0.07$  % pour  $O=5$  mm).

Ces résultats confirment que si la profondeur reste le paramètre prépondérant, l'ouverture peut avoir un effet secondaire non négligeable pour les fissures larges.

**Tableau 7 :** Fréquence Naturelle d'une poutre Cantilever vs Ouverture de la fissure ( $a/b = 0.1$ , milieu de la poutre).

**Table 7:** Natural frequency of a cantilever beam versus crack opening ( $a/b = 0.1$ , center of the beam).

Ouverture fissure O (mm)	Mode 1		Mode 2	
	fn1 (Hz)	fn2(Hz)	fn1 (Hz)	fn2(Hz)
	Forme Rect	Forme Lentille	Forme Rect	Forme Lentille
0.2	4206.3	4206.54	12611.48	12612.2
0.1	4206.29	4206.74	12611.46	12612.81
0.05	4206.33	4206.76	12611.55	12612.87
0.02	4207.18	4206.86	12614.16	12613.19

Le Tableau 7 synthétise l'effet de l'ouverture pour les deux formes de fissure. Il révèle une influence faible mais mesurable pour des ouvertures significatives ( $O \geq 1$  mm). Pour une profondeur fixe ( $a = 2.5$  mm), une augmentation de l'ouverture de 0.02 mm à 5 mm entraîne une baisse relative des fréquences d'environ  $-0.07$  %. Cette tendance s'explique par la modification de la géométrie de la section fissurée, qui réduit l'inertie locale et donc la rigidité effective de la poutre. La baisse est légèrement plus prononcée pour le deuxième mode ( $\delta fn_2 \approx -0.070\%$ ) que pour le premier ( $\delta fn_1 \approx -0.067\%$ ), ce qui suggère une sensibilité modale différentielle. En résumé, la sévérité du dommage est principalement gouvernée par la profondeur de la fissure, tandis que sa localisation détermine quels modes de vibration sont les plus affectés. Une fissure profonde près de l'encastrement a un impact global, tandis qu'une fissure plus fine à mi-portée affecte préférentiellement les modes d'ordre supérieur.

Cette analyse fournit une grille de lecture essentielle pour le diagnostic d'endommagement par analyse vibratoire, permettant de discriminer l'effet de la taille et de la position d'un défaut à partir de l'évolution du spectre de fréquences.

### 3.3. Analyse statique linéaire

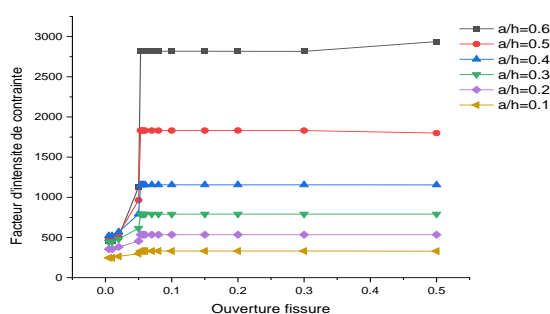
Une analyse statique linéaire a été réalisée pour quantifier la sévérité des fissures via le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC). Ce facteur dépend de la géométrie de la fissure Tada et al. [7], évalue la concentration de contrainte à la pointe de la fissure.

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \cdot F_I \left( \frac{a}{h} \right) \quad (1)$$

Tel que ;

$$F_I \left( \frac{a}{h} \right) = 1.122 - 0.231 \left( \frac{a}{h} \right) + 10.55 \left( \frac{a}{h} \right)^2 - 21.71 \left( \frac{a}{h} \right)^3 + 30.382 \left( \frac{a}{h} \right)^4 \quad (1)$$

Le facteur d'intensité de contrainte calculé pour quantifier l'amplification des contraintes au voisinage de la pointe de fissure Eqs. (1) et (2) et cela pour deux géométries de fissure : une fissure en forme de V et une fissure en forme de lentille. Pour chaque géométrie, une charge statique a été appliquée et les champs de contraintes et de déplacements ont été post-traités sous ANSYS.

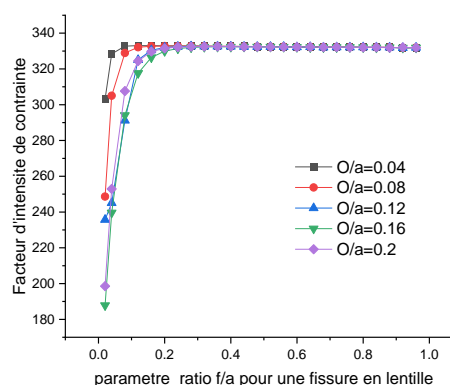


**Figure 6:** Facteur d'intensité de contrainte (FIC) en fonction de l'ouverture de la fissure pour différente profondeur normalisée ( $a/h$ ) - fissure en V.

**Figure 6:** Stress Intensity Factor SIF as a function crack opening for different normalized depths ( $a/h$ ) - V-shaped crack.

Les Figures 6 et 7 présentent l'évolution du facteur d'intensité de contrainte (FIC) en fonction de la profondeur de fissure normalisée.

La Figure 6 montre une croissance quasi-linéaire du FIC avec l'augmentation de la profondeur normalisée de la fissure. Cette tendance révèle une concentration de contraintes extrême au niveau de la pointe aiguë du défaut. La géométrie en V, avec son faible rayon de courbure à la pointe, agit comme un concentrateur de contraintes sévère, facilitant à la fois l'amorçage et la propagation de la fissure.



**Figure 7:** Facteur d'intensité de contrainte (FIC) en fonction du paramètre de forme  $f/a$  pour différents rapports d'ouverture  $O/a$  (fissure en lentille).

**Figure 7:** Stress Intensity Factor SIF as a function of the shape  $f/a$  for different opening ratio  $O/a$  (lens-shaped crack)

La Figure 7 illustre l'évolution du facteur d'intensité de contrainte (FIC) en fonction du paramètre de forme  $f/a$  pour une fissure en lentille, avec différentes valeurs du rapport d'ouverture  $O/a$ . Contrairement à la croissance quasi-linéaire observée pour la fissure en V, la géométrie arrondie atténue la concentration de contraintes en redistribuant les efforts plus uniformément, ce qui réduit le risque de rupture.

Pour un rapport  $f/a$  donné, le FIC augmente avec le rapport  $O/a$ , mais de manière moins prononcée que pour une fissure à pointe aiguë. Cette amplification reste nettement inférieure à celle observée pour une fissure en V de profondeur équivalente, où le FIC peut atteindre des valeurs critiques supérieures à 3.0.

La courbure progressive de la fissure lenticulaire redistribue les contraintes de manière plus uniforme, réduisant ainsi le gradient de contraintes en pointe de fissure. Par conséquent,

ce type de défaut, bien que toujours préjudiciable, présente un risque de rupture moindre qu'une fissure en V. Ces résultats soulignent l'importance cruciale de la morphologie de la pointe de fissure dans l'évaluation du FIC. Ils confirment que les fissures à géométrie arrondie (lentille, U) sont intrinsèquement moins sévères que celles à pointe aiguë tel que V ou rectangulaire, et ce, indépendamment de leur profondeur ou de leur ouverture. Cette analyse met en évidence la nécessité de prendre en compte la forme des fissures dans les modèles de mécanique de la rupture, afin d'affiner les critères de criticité et d'éviter le surdimensionnement des structures.

#### 4- Conclusion

Cette étude démontre que la géométrie des fissures influence profondément le facteur d'intensité de contrainte (FIC) et les fréquences propres des poutres en porte-à-faux. Le FIC varie significativement selon la forme et la profondeur de la fissure, les fissures en V et rectangulaires présentant des concentrations de contraintes plus élevées que les fissures en U.

Les poutres fissurées présentent une réduction de leurs fréquences naturelles, dont l'ampleur dépend de la géométrie, la profondeur et la position de la fissure. La forme rectangulaire de la pointe de la fissure et la forme en V provoquent des perturbations plus prononcées. Les ouvertures de fissures plus petites affectent minimalement les fréquences, tandis que les fissures plus profondes (rapport de profondeur de 0,5) entraînent des écarts fondamentaux, ce qui souligne l'importance cruciale de la géométrie de la fissure dans les méthodes de détection par vibration. Ces résultats mettent en évidence la nécessité de prendre en compte la géométrie des fissures dans les analyses de mécanique de la rupture et vibratoire afin d'améliorer la maintenance prédictive et la fiabilité structurelle.

#### Références bibliographiques

- [1] Paris, P.C. and Erdogan, F., A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering*, 85, 528-533, 1963.
- [2] Dimarogonas, A.D., *Vibration of cracked structures: A state of the art review*, Engineering Fracture Mechanics, Ed. Elsevier, Vol. 55, No. 5, pp. 831-857, 1996.
- [3] Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., Longitudinal vibration of a continuous cracked bar., *Proc. of the 8th Int. Conf. on Fracture Mech.*, Budapest, Hungary, 1998.
- [4] Krawczuk, M., Palacz, M. and Ostachowicz, W., The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method., *Journal of Sound and Vibration*, Ed. Elsevier, Vol. 264, No. 5, pp. 1139-1153, 2006.
- [5] Patil, D.P. and Maiti, S.K., Detection of cracks in beam structures using measurements of natural frequencies., *Journal of Sound and Vibration*, Ed. Elsevier, Vol. 281, Nos 3-5, pp. 1153-1172, 2005.
- [6] Ayas, H., Chabaat, M. and Amara, L., Dynamic analysis of a cracked bar by the method of characteristics., *International Journal of Structural Integrity*, Ed. Emerald, Vol. 10, No. 4, pp. 438-453, 2019.
- [7] Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 3rd ed., ASME Press, New York, NY., 2000